Title	再ビ單葉函數ノ除外値ニ就キテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 217 p.269-p.272
Issue Date	1941-06-13
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74862
rights	
Note	

932. 再ビ單葉函數ノ除外値ニ就キテ

春木　博（神戸商船）

$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ ニテ正則、且ツ單葉ナリトシ、$|z|<1$ デ $f(z)\neq\alpha$ ナリトスル。

シカラバ

$$|\alpha|\geqq\sqrt[3]{\frac{-Q+\sqrt{Q^2+4P^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-Q-\sqrt{Q^2+4P^3}}{2}}-\frac{1}{3}\,\frac{|a_2^2+2a_3|}{4+|a_4|}$$

茲ニ

$$P=-\frac{1}{9}\frac{|a_2^2+2a_3|^2}{(a+|a_4|)^2}+\frac{|a_2|}{4+|a_4|}$$

$$Q=\frac{2}{27}\frac{|a_2^2+2a_3|^3}{(4+|a_4|)^3}-\frac{|a_2||a_2^2+2a_3|}{(4+|a_4|)^2}-\frac{1}{4+|a_4|}$$

(証明) $g(z)=-\alpha^2\left(\dfrac{1}{f(z)-\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ ヲ考フレバ $f(z)$ ガ $|z|<1$ デ正則、單葉、シカモ $|z|<1$ デ $f(z)\neq\alpha$ ナル故、$g(z)$ ハ $|z|<1$ ニテ正則單葉デアル。

$g(z)$ ヲ展開スレバ

$$g(z)=z+b_2z^2+b_3z^3+b_4z^4+\cdots\cdots$$

城氏ノ定理ニヨリ　$|b_4|\leqq 4$

即チ　$|a_4\alpha^3+2a_3\alpha^2+a_2^2\alpha^2+3a_2\alpha+1|\leqq 4|\alpha|^3$

之ヨリ　$(4+|a_4|)|\alpha|^3+|a_2^2+2a_3||\alpha|^2+3|a_2||\alpha|-1\geqq 0$

$$(4+|a_4|)x^3+|a_2^2+2a_3|x^2+3|a_2|x-1=0$$

ナル三次方程式ハ、Descartes ノ符号律ニヨリ容易ニ正根ハタダ一ツナルコトガ判ルカラ、ソレヲ ρ トスレバ

$$|\alpha|\geqq\rho$$

結局上記ノ結果ヲ得ル。

次ニ、或ル二ツノ不等式ヲ証明シテ見ヨウ。假定ハ全ク前ト同ジナルトキ

$$|f(z)-\alpha|\leqq|\alpha|\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2,\quad \left|\arg\left(1-\frac{f(z)}{\alpha}\right)\right|\leqq 2\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

ガ成立スル。

（証明）

$$g(\zeta)=\frac{(f(z)-\alpha)^2}{(1-|z|^2)f'(z)}\left\{\frac{1}{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right)-\alpha}-\frac{1}{f(z)-\alpha}\right\}$$

ヲ作レバ $f(z)$ ガ $|z|<1$ ニテ正則、單葉デシカモ $|z|<1$ デ $f(z)\neq\alpha$ ナルコトカラ $g(\zeta)$ ハ $|\zeta|<1$ ニテ正則單葉デアル。

$g(\zeta)$ ヲ展開スレバ

$$g(\zeta)=\zeta+\frac{(1-|z|^2)f''(z)(f(z)-\alpha)-f'(z)\{2\bar{z}(f(z)-\alpha)+2f'(z)(1-|z|^2)\}}{2(f(z)-\alpha)f'(z)}\zeta^2$$

$$+\cdots\cdots$$

$g(\zeta)$ ハ $|\zeta|<1$ ニテ正則單葉ナル故、Bieberbach ノ定理ニヨリ

$$\left|\frac{(1-|z|^2)f''(z)(f(z)-\alpha)-f'(z)\{2\bar{z}(f(z)-\alpha)+2f'(z)(1-|z|^2)\}}{2(f(z)-\alpha)f'(z)}\right|$$

$$\leqq 2$$

之ヨリ $\quad \left|z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}-\dfrac{2|z|^2}{1-|z|^2}-\dfrac{2zf'(z)}{f(z)-\alpha}\right|\leqq\dfrac{4|z|}{1-|z|^2}$

之ヨリ $\quad \left|z\dfrac{2f'(z)}{f(z)-\alpha}\right|\leqq\left|z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}-\dfrac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|+\dfrac{4|z|}{1-|z|^2}$

シカルニ $f(z)$ ハ $|z|<1$ ニテ正則單葉ナル故

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leqq\frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

故ニ $\quad \left|z\dfrac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\right|\leqq\dfrac{4|z|}{1-|z|^2}$

故ニ

$$\mathfrak{R}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\right) \leqq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

$$\mathfrak{I}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\right) \leqq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

シカルニ

$$\mathfrak{R}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\right) = |z|\frac{d\log|f(z)-\alpha|}{d|z|}$$

$$\mathfrak{I}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\right) = |z|\frac{d\arg(f(z)-\alpha)}{d|z|}$$

ナル故

$$\frac{d\log|f(z)-\alpha|}{d|z|} \leqq \frac{4}{1-|z|^2}$$

$$\frac{d\arg(f(z)-\alpha)}{d|z|} \leqq \frac{4}{1-|z|^2}$$

コノ両式ヲ 0 ヨリ $|z|$ マデ積分スルコトニヨリ

$$|f(z)-\alpha| \leqq |\alpha|\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2$$

$$\left|\arg\left(1-\frac{f(z)}{\alpha}\right)\right| \leqq 2\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

—— (完) ——